Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Olimpiada de Matematică
Etapa judeţeană şi a Municipiului Bucureşti
11 Martie 2006

CLASA A X-A – SOLUŢII şi BAREM ORIENTATIV

Problema 1. Se consideră numerele reale $a, b, c \in (0, 1)$ şi $x, y, z \in (0, \infty)$, astfel încât

$$a^x = bc,\ b^y = ca,\ c^z = ab.$$

Să se arate că

$$\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2+y} + \frac{1}{2+z} \leq \frac{3}{4}.$$

Soluţie. Notăm $A = \log_{\frac{1}{2}} a, B = \log_{\frac{1}{2}} b, C = \log_{\frac{1}{2}} c$. Atunci $x = \frac{B+C}{A}, y = \frac{C+A}{B}, z = \frac{A+B}{C}$. .... 1 punct

Inegalitatea devine

$$\sum \frac{1}{2 + \frac{B+C}{A}} \leq \frac{3}{4},$$

sau cu notaţia $S = A + B + C$

$$\sum \frac{A}{S+A} \leq \frac{3}{4} \quad \ldots \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ 3 \text{ puncte}$$

Aceasta este echivalentă cu

$$-\sum \frac{A}{S+A} \geq -\frac{3}{4} \text{ sau } \sum \left(1 - \frac{A}{S+A}\right) \geq \frac{9}{4},$$

ceea ce poate fi scris

$$4S \sum \frac{1}{S+A} \geq 9,$$

inegalitate imediat demonstrabilă.........................3 puncte

Problema 2. Considerăm triunghiul ABC şi punctele $M \in (BC)$, $N \in (CA), P \in (AB)$ astfel încât $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{BM}{MC} = \dfrac{CN}{NA}$. Să se arate că dacă triunghiul MNP este echilateral, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Soluţie. Notăm $\lambda = \dfrac{AP}{AB} = \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{CN}{CA}$.

Considerăm un reper ortonormat cu originea în M astfel încât afixul punctului N este 1 şi afixul lui P este $\epsilon = \cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}$
.... 1 punct

Dacă a, b, c sunt afixele punctelor A, B, C atunci

$\epsilon = (1-\lambda)a + \lambda b, 0 = (1-\lambda)b + \lambda c,$ şi $1 = (1-\lambda)c + \lambda a,$ .....2 puncte

Atunci $\dfrac{c-a}{b-a} = \epsilon$ ....3 puncte

Rezultă $AC = AB$ şi $A = \frac{\pi}{3}$ ....1 punct

Problema 3. Spunem că o prismă este *binară* dacă există o etichetare a vârfurilor sale cu numere din mulţimea $\{-1, +1\}$, astfel încât produsul numerelor atribuite vârfurilor oricărei feţe (bază sau faţă laterală) este -1.

a) Să se arate că orice prismă *binară* are numărul vârfurilor divizibil cu 8.

b) Să se arate că orice prismă cu 2000 de vârfuri este *binară*.

Soluţie. a) Să presupunem că poligonul bază are n vârfuri. Cum produsul numerelor de pe fiecare faţă este -1, rezultă că produsul numerelor de pe toate feţele laterale este $(-1)^n$, şi în acelaşi timp 1, deoarece fiecare număr apare la pătrat. Rezultă $n = 2p$.....2 puncte

Apoi, dacă $n = 4k+2$, luând feţele din 2 în 2, produsul pe fiecare faţă este -1, deci produsul total este $(-1)^{2k+1} = -1$. Acesta este egal cu produsul tuturor numerelor, deci cu produsul celor două baze, adică 1, fals. Rezultă $n = 4k$ şi atunci numărul de vârfuri este $8k$.

....2 puncte

b) Alegem -1 pentru vârfurile $A_1, A_3, A_5 \ldots, A_{997}$ şi $+1$ pentru restul vârfurilor de pe bază. Pe baza superioară alegem 1 pentru toate vârfurile, cu excepţia lui A_{999} unde punem -1.......3 puncte

Problema 4. a) Să se găsească două mulţimi X, Y astfel încât $X \cap Y = \emptyset$, $X \cup Y = \mathbb{Q}_+^*$ şi $Y = \{a \cdot b \mid a, b \in X\}$.

b) Să se găsească două mulţimi U, V astfel încât $U \cap V = \emptyset, U \cup V = \mathbb{R}$ şi $V = \{x + y \mid x, y \in U\}$.

Soluţie. a) Alegem X ca fiind mulţimea produselor de tipul $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, unde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sunt numere prime distincte, α_i sunt întregi şi $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ este impară. Punem $Y = \mathbb{Q}_+^* \setminus X$.........2 puncte

Verificarea proprietăţii $Y = \{a \cdot b \mid a, b \in X\}$ este imediată......1 punct

b) Alegem

$$U = \cup_{k \in \mathbb{Z}} [3k+1, 3k+2) \text{ şi } V = \mathbb{R} \setminus U \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2 \text{ puncte}$$

Verificarea egalităţii $V = \{x + y \mid x, y \in U\}$ ....2 puncte.